DS n°4 : ED, nombres réels, suites, limites

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ± 1 point.
La difficulté des exercices est (plus ou moins) progressive.

Exercice 1 : Équations différentielles

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Résoudre : $\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$

2) **a)** Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

b) En déduire les solutions de : $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{ch}(2x)$.

Exercice 2 : Calcul de limites

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(2x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} (\tan 2x)(\ln x)$.

2) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+\pi} - \sqrt{x}\right)$

b) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \sin a - \sin b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sin\sqrt{x+\pi} - \sin\sqrt{x}\right)$.

d) Est-ce que la limite suivante existe : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sin(x+\pi) - \sin x)$? Justifier.

Exercice 3 : Périodes de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

1) Que peut-on dire de la somme de deux rationnels ? Justifier.

2) Que peut-on dire de la somme d'un rationnel et d'un irrationnel ? Justifier.

On note f la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$, ainsi que $\mathscr{P}$ l'ensemble des périodes de f :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \mathscr{P} = \{T > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\}$$

L'objectif est de déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$.

3) On pose $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$. Montrer que $\mathbb{Q}_+^* \subset \mathscr{P}$.

4) On suppose qu'il existe un élément $T \in \mathscr{P}$ irrationnel. Déduire une contradiction.

5) Que vaut finalement l'ensemble $\mathscr{P}$?

Tournez la page S.V.P.

Problème : Pondération binomiale

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit une suite réelle $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$

1) Justifier brièvement la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

- **a)** En utilisant la forme exponentielle, montrer que $\dfrac{1}{2^n}n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- **b)** Montrer que $\dfrac{1}{n^k}k!\dbinom{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- **c)** En déduire que $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}|a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) On suppose que (a_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

- **a)** Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N \quad |a_n^*| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k| + \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}.$
- **b)** Montrer qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N' \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k| \leq \varepsilon.$
- **c)** En déduire que (a_n^*) converge vers 0.

4) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que si (a_n) converge vers ℓ, alors (a_n^*) converge vers ℓ.

Exercice 4 : Limites supérieures et inférieures d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'ensemble des termes de cette suite ayant un rang supérieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$A_n = \{u_k \mid k \geq n\}$$

1) Justifier l'existence des suites $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n^+ = \sup A_n \qquad u_n^- = \inf A_n$$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subset A_n$.

3) En déduire que (u_n^+) et (u_n^-) convergent.

4) Montrer que si (u_n^+) et (u_n^-) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

5) Montrer que (u_n) converge si et seulement si $u_n^+ - u_n^- \to 0$.

Quelle est la valeur de $\dfrac{\mathrm{sin\,x}}{\mathrm{n}}$?

Réponse : $\dfrac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{n}} = \dfrac{\mathrm{si}\cancel{\mathrm{n}}\mathrm{x}}{\cancel{\mathrm{n}}} = \mathrm{six} = 6$